第 4 講　いろいろな数列の和

PART1 数列の和と一般項

要点 ①　数列の和から一般項を求める

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，$a_1=S_1$ である。

また，$n\geqq 2$ のとき

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}+a_n$$

$$S_{n-1}=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{n-1}$$

である。よって，$S_n=S_{n-1}+a_n$ すなわち $S_n-S_{n-1}=a_n$ である。

したがって，以下のことが成り立つ。

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$a_1=S_1$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$

例　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が，$S_n=n^2-3n$ で表されているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求める。

$$a_1=\qquad=1^2-3\cdot 1=-2$$

また，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=$$

$$=(n^2-3n)-\{(n-1)^2-3(n-1)\}$$

$$=(n^2-3n)-(n^2-5n+4)$$

$$=2n-4$$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot 1-4=-2$ となり，a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n=2n-4$

[MEMO]

1 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $S_n=3n^2+2n$

(2) $S_n=2^n-1$

Point Pickup

数列の和と一般項

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

初項について　$a_1=S_1$　…… ①

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$　…… ②

数列 $\{a_n\}$ の初項は①より求めることができる。

②で求めた a_n の式において $n=1$ を代入した結果が a_1 と一致すれば，a_n は $n\geqq 1$ のとき，②で求めた式で表される。

第 4 講　PART1 確認問題

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられ

ているとき，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1　$S_n = n^2 + 4n$

$a_n = \boxed{ア}\,n + \boxed{イ}$

2　$S_n = 3^n$

$a_1 = \boxed{ウ}$

$n \geqq 2$ のとき，$a_n = \boxed{エ} \cdot \boxed{オ}^{n-1}$

第 4 講　いろいろな数列の和

PART1　数列の和と一般項

1　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が次のように与えられているとき，数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$S_n=3n^2+2n$　　　(2)　$S_n=2^n-1$

[解答]

(1)　$a_1=S_1=3\cdot1^2+2\cdot1=5$

また，$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(3n^2+2n)-\{3(n-1)^2+2(n-1)\}\\&=(3n^2+2n)-(3n^2-4n+1)\\&=6n-1\end{aligned}$$

この式で，$n=1$ のとき $6\cdot1-1=5$ となり，a_1 と一致する。よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n=6n-1$

(2)　$a_1=S_1=2^1-1=1$

また，$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)\\&=2^n-2^{n-1}\\&=2\cdot2^{n-1}-1\cdot2^{n-1}=(2-1)\cdot2^{n-1}=2^{n-1}\end{aligned}$$

この式で，$n=1$ のとき $2^{1-1}=2^0=1$ となり，a_1 と一致する。よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって $a_n=2^{n-1}$

第 4 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：3

[解説]

$a_1=S_1=1^2+4\cdot1=5$ である。

また，$n\geqq2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1} \quad \text{[A]}$$
$$=(n^2+4n)-\{(n-1)^2+4(n-1)\}$$
$$=(n^2+4n)-(n^2+2n-3)$$
$$=2n+3$$

[A]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，
$a_1=S_1$
$n\geqq2$ のとき，
$a_n=S_n-S_{n-1}$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot1+3=5$ となり，a_1 と一致する。

よって，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって，$\boldsymbol{a_n=2n+3}$

2 **[正解]** ウ：3，エ：2，オ：3

[解説]

$a_1=S_1=3^1=3$ である。

また，$n\geqq2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1} \quad \text{[B]}$$
$$=3^n-3^{n-1}$$
$$=3\cdot3^{n-1}-3^{n-1}$$
$$=(3-1)\cdot3^{n-1}$$
$$=2\cdot3^{n-1}$$

[B]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると，
$a_1=S_1$
$n\geqq2$ のとき，
$a_n=S_n-S_{n-1}$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot3^{1-1}=2$ となり，a_1 と一致しない。

よって，この式は $n=1$ のときは成り立たない。

したがって，

$$\boldsymbol{a_1=3}$$

$n\geqq2$ のとき，$\boldsymbol{a_n=2\cdot3^{n-1}}$